LAHENDUSED 8. KLASS

1. **Vastus: Siniseid palle on 16, rohelisi 32, punaseid 64, kollaseid 96 ja valgeid 192.**

Lahendus:

Tähistame igat värvi pallide arvu värvi esitähega.

Sel juhul saame, et $s + r + p + k + v = 400$. Ülejäänud seostest saame, et $2s = r$ ja $4s = p$. Neist kahest saame kokku, et $p = 2r$ ehk punaseid on kaks korda rohkem kui rohelisi.

Ülesande teksti põhjal $3r = k$ ja $v = 2k$, milledest saame, et $v = 6r$ ehk valgeid on kuus korda rohkem kui rohelisi.

Järelikult $(r : 2) + r + 2r + 3r + 6r = 400$, millest $r = 32$.

Järelikult siniseid on $32 : 2 = 16$, punaseid on $4 \cdot 16 = 64$.

Kollaseid on $3 \cdot 32 = 96$ ja valgeid on $2 \cdot 96 = 192$.

Hindamine:

Siniste ja punaste pallide arvud, avaldatud roheliste pallide kaudu:	2p
Valgete ja kollaste pallide arvud avaldatud roheliste pallide arvu kaudu: (*Märkus. Määratud värv ja teist värvi pallide arvu avaldamine selle kaudu, kokku 4p. Iga värvi avaldamine 1p.*)	2p
Pallide üldarvu kasutades leitud ühte värvi pallide arv:	1p
Leitud ülejäänud pallide arvud:	2p
	7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p

2. **Vastus. Summa on 2705.**

Lahendus:

Olgu kolm esimest arvu reas järjest a, b ja c. Olgu neljas arv d, viies e ja kuues f. Et $a + b + c = 2020$ ja $b + c + d = 2020$, siis $a = d$. Samamoodi saame, et $e = b$ ja $f = c$.

Reas on koguaeg arvud järjestuses $a, b, c, a, b, c, a, b, \ldots$.

Alati kui järjekorranumber jagub arvuga 3, siis seal on arv c. Kui järjekorranumber annab arvuga 3 jagamisel jäägi 2, on seal arv b ning kui annab jagamisel arvuga 3 jäägi üks, on seal arv a.

Kuna 666 : 3 = 222, siis 666. kohal olev arv on c.

Kuna 1097 : 3 = 365 jääk 2, siis 1097. kohal olev arv on b.

Järelikult arv a on 2020 – 214 – 899 = 907.

Arv 20 annab arvuga 3 jagamisel jäägi 2 ning 20. kohal on arv 899.

Arv 2000 annab arvuga 3 jagamisel jäägi 2 ning 2000. kohal on arv 899

Arv 2020 annab arvuga 3 jagamisel jäägi 1 ning seega 2020. kohal on arv 907.

Küsitud kolme arvu summa on 899 + 899 + 907 = 2705.

Hindamine:

Näidatud, et reas on kolme erineva suurusega arve ja need paiknevad järjest ühesuguste rühmadena:	1p
Leitud see kolmik järjestuse täpsusega:	3p
Leitud arvud, mis paiknevad kohtadel järjekorranumbritega 20, 2000 ja 2020:	2p
Leitud kohtadel järjekorranumbritega 20, 2000 ja 2020 olevate arvude summa:	1p
	7p

Märkus: Antud vaid õige vastus: 2p

3. **Vastus. Vähim võimalik arvu 5 algtegurina esinemise kordade arv on 503.**

Lahendus:

Iga viies arv jagub arvuga 5. Seega 2021 arvu saame jaotada 2021 : 5 = 404 rühma ja üks arv jääb üle. Seega on nende seas kindlasti vähemalt 404 arvu, mille algtegurite seas on arv 5. Aga saaks olla ka 405, juhul kui see üks ülejääv arv jaguks arvuga 5.
Et 2021 : 25 = 80 jääk 21, siis on seal kindlasti vähemalt 80 arvu, mis sisaldavad arvu 5 algtegurina kaks korda.
Et 2021 : 125 = 16 jääk 21, siis on seal kindlasti vähemalt 16 arvu, mis sisaldavad arvu 5 algtegurina kolm korda.
Et 2021 : 625 = 3 jääk 146, siis on seal kindlasti vähemalt 3 arvu, mis sisaldavad arvu 5 algtegurina 4 korda.
Arvu 5 viies aste on juba suurem kui 2021 ja seega saame valida 2021 arvu nii, et nende seas ei ole ühtegi sellist, mis sisaldaks arvu 5 algtegurina 5 korda.
Seega arvu 5 esineb algtegurina vähemalt 404 + 80 + 16 + 3 = 503 korda.
See on nii, kui võtame näiteks arvud 1 kuni 2021, 2 kuni 2022, 3 kuni 2023, 4 kuni 2024.
Kui võtaksime aga juba arvud 5 kuni 2025, siis oleks arvuga 5 jaguvaid arve juba nende seas 405 tükki. (Arv 2025 jaguks ka arvuga 25 ning algtegurit 5 lisanduks veel üks kord.)

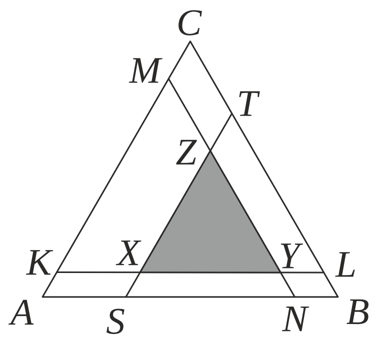
Hindamine:

Tähelepanek, et iga viies arv jagub arvuga 5:	1p
Leitud vähemalt mitu jagub arvuga 5:	1p
Leitud vähemalt mitu jagub arvuga 25 ehk vähemalt mitmes arvus on arvu 5 algtegurina kaks korda:	1p
Leitud vähemalt mitu jagub arvuga 125:	1p
Leitu vähemalt mitu jagub arvuga 625:	1p
Selgitatud, et saab leida nii, et nende seast ükski ei jagu arvu 5 viienda astmega:	1p
Leitud, et korrutises on arvu 5 algtegurina vähemalt 503 korda:	1p
	7p

Märkus: Antud ainult õige vastus: 2p.

4. Vastus. Ümbermõõt on 30 cm.

Lahendus:



Tähistame tumedamaks värvitud kolmnurga tipud tähtedega X, Y ja Z.

Kolmnurga AMC külje pikkus on 90 cm : 3 = 30 cm.

Kolmnurga SBT ümbermõõt on 60 cm ja seega ühe külje pikkus on 60 cm : 3 = 20 cm.

Seega SB = 20 cm ning $AS = AB - SB$ = 30 cm – 20 cm = 10 cm.

Kolmnurga ANM ümbermõõt on 70 cm ja seega ühe külje pikkus on 70 cm : 3 = $23\frac{1}{3}$ cm.

Seega $AN = 23\frac{1}{3}$ cm ja NB = 30 cm – $23\frac{1}{3}$ cm = $6\frac{2}{3}$ cm.

Kuna KL ja AB, AC ja ST ning MN ja CB on paarikaupa paralleelsed, siis nelinurgad $ASXK$ ja $NBLY$ on on rööpkülikud ning ja $KX = AS$ = 10 cm ja $YL = NB = 6\frac{2}{3}$ cm.

Kolmnurga KLC ümbermõõt on 80 cm ja seega ühe külje pikkus on 80 cm : 3 = $26\frac{2}{3}$ cm.

Seega $XY = KL - KX - YL = 26\frac{2}{3}$ cm – 10 cm – $6\frac{2}{3}$ cm = 10 cm.

Kolmnurga XYZ ümbermõõt on $3 \cdot 10$ cm = 30 cm.

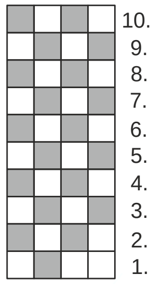
Hindamine:

Leitud nelja antud kolmnurga ümbermõõtudest nende külgede pikkused:	2p
Tähelepanek, et paralleelsete lõikude tõttu tekivad kolmnurga ABC tippude juurde rööpkülikud:	2p
Leitud tumedamaks värvitud kolmnurga külje pikkus:	2p
Leitud kolmnurga ümbermõõt:	1p
	7p

Märkus: Antud ainult õige vastus õige ühikuga 2p.

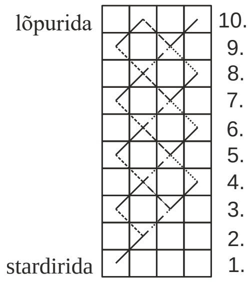
5. **Vastus. a) 0 võimalust, b) 55 võimalust**

<u>Lahendus:</u>



Nummerdame read alates stardireast arvudega 1 kuni 10.

a) Värvime mängulaua malelaua korras. Näeme, et kui nupp on alguses mingit värvi ruudul, siis ka igal järgneval käigul peab ta asuma sama värvi ruudul. Seega võimalust liikuda stardirea vasakult teiselt ruudult lõpurea vasakult neljandale ruudule ei ole, sest need on erinevat värvi.



b) Paneme nupu stardirea ehk esimese rea vasakult esimesele ruudule.

Näeme, et liikumiseks teisele reale on ainult üks võimalus. Teiselt realt kolmandale liikumiseks on nüüd kaks võimalust. Neist ühelt tekib neljandale reale liikumiseks vaid üks võimalus ja teiselt tekib kaks võimalust. Nii jätkates saame joonisel antud pildi.

Hakkame nüüd loendama võimalusi.

Reale 2 jõudmiseks on vaid üks võimalus. Reale 3 jõudmiseks on 2 võimalust.

Rea 4 vasakult neljandale ruudule jõudmiseks pidime eelmisel käigul olema kolmanda rea vasakult kolmandal ruudul. Seega sinna jõudmiseks on samapalju võimalusi kui kolmanda rea vasakult kolmandale. Rea neli vasakult teisele jõudmiseks pidime enne seda olema kolmanda rea vasakult esimesel või vasakult kolmandal. Seega neljanda rea vasakult teisele ruudule jõudmiseks on niipalju võimalusi kui oli kolmanda rea ruutudele kokku.

Seega neljanda rea ruutudele jõudmiseks kokku on võimalusi 2 + 1 = 3.

Rea 5 vasakult esimesele ruudule jõudmiseks pidi nupp olema neljanda rea vasakult teisel ruudul, kuhu jõudmiseks oli 2 võimalust. Rea 5 vasakult kolmandale jõudmiseks võis nupp ennem olla neljanda rea vasakult kas teisel või neljandal ruudul. Seega võimalusi sinna jõudmiseks on 3. Kokku reale 5 jõudmiseks on võimalusi 2 + 3 = 5.

Rea 6 vasakult teisele ruudule jõudmiseks pidi nupp ennem olema viienda rea kas vasakult esimesel või kolmandal ruudul ning seega sinna jõudmiseks on sama palju võimalusi nagu on viiendale reale jõudmiseks, s.o 5 võimalust.

Rea 6 vasakult neljandale ruudule jõudmiseks pidi nupp ennem olema viienda rea vasakult kolmandal ruudul, kuhu jõudmiste arv oli sama, mis neljandale reale jõudmiste arv, s.o 3.

Seega reale 6 jõudmiseks on kokku 5 + 3 = 8 võimalust.

Rea 7 ja kõigi järgnevate ridade korral täheldame sama seaduspärasust, et ruutudest ühele jõudmiste arv võrdub eelmise reale jõudmiste arvuga ja teisele ruudule jõudmiste arv on võrdne üle-eelmisele reale jõudmiste arvuga.

Seega reale 7 jõudmiseks on erinevaid võimalusi 8 + 5 = 13.

Reale 8 jõudmiseks on 13 + 8 = 21 võimalust.

Reale 9 jõudmiseks on 21 + 13 = 34 võimalust.

Reale 10 jõudmiseks on 34 + 21 = 55 võimalust.

Hindamine:

a) Näidatud või selgitatud, et kui ruudustik värvida malelaua korras, siis saab liikuda vaid sama värvi ruutudel:	1p
Leitud õige võimaluste arv:	1p
b) Leitud 5. reale jõudmiste võimaluste arv:	1p.
Märgatud seaduspära kuidas rida realt võimaluste arv sõltub eelmine ja üle-eelmise rea võimaluste arvust:	2p
Leitud 7. ja või 8. reale jõudmiste arv:	1p.
Leitud 10. reale jõudmiste võimaluste arv:	1p
	7p
Kui seaduspärasust ei ole märgatud, siis	
b) Leitud 5. reale jõudmiste võimaluste arv:	1p
leitud õigesti 6 reale jõudmiste arv:	1p
Leitud õigesti 7. ja/või 8. reale jõudmiste arv:	1p
Leitud õigesti 9. reale jõudmiste arv:	1p
Leitud õigesti 10. reale jõudmiste arv:	1p

Märkus: a) osa vaid õige vastus 1p, b) osa vaid õige vastus 2p.